BEWEISEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Prof.Dr. Heinrich Bürger

1. Formen des Begründens

Jeder Mensch erhält im Laufe der Zeit eine Fülle von Informationen. Es handelt sich dabei meist um Aussagen, deren Richtigkeit anerkannt, aber auch bezweifelt werden kann. Einige Beispiele von solchen Aussagen sollen zeigen, daß die Beurteilung der Richtigkeit einer Aussage subjektiv ist:

(1) $19 + 7 = 26$
(2) $17 \cdot 7 = 119$
(3) $18^5 = 1\,889\,568$
(4) Klagenfurt hat mehr als 30 000 Einwohner
(5) Sport ist gesund.

Die Aussage (1) etwa ist für jede Person, die die Addition natürlicher Zahlen einigermaßen beherrscht, unmittelbar klar, für ein Kind im Alter von 6 Jahren meist jedoch nicht. Ähnlich überlegt man auch an den übrigen Beispielen, daß es von Vorkenntnissen oder Vorurteilen einer Person abhängt, ob ihr eine Aussage unmittelbar klar erscheint oder ob sie diese Aussage anzweifelt. Aussagen werden schließlich auch dann anerkannt, wenn sie durch Sinneswahrnehmungen unmittelbar bestätigt werden können.

Sollte eine Person A eine Aussage α machen, die von einer Person B bezweifelt wird, so kann A auf verschiedene Weise Gründe für die Richtigkeit von α anführen:

(a) Bestätigung der Richtigkeit durch einen glaubwürdigen Zeugen, etwa durch einen Text in einem entsprechenden Fachbuch oder durch einen Fachmann (Berufung auf eine Autorität).

(b) Aufzeigen von Fakten, die Teile der Aussage bestätigen; etwa Verifizierung einer Aussage, die eine Menge von Elementen betrifft, an einzelnen Elementen dieser Menge (Induktives Schließen).

(c) Anführen von Aussagen, die von B als richtig angesehen werden, deren Richtigkeit in einem gewissen Zusammenhang mit der Richtigkeit von α steht, deren Richtigkeit aber nicht hinreichend für die

Richtigkeit von α ist, also etwa Folgerungen aus α sind (Reduktives Schließen).

(d) Anführen von Aussagen, die von B als richtig angesehen werden und deren Richtigkeit hinreichend für die Richtigkeit von α ist (Deduktives Schließen).

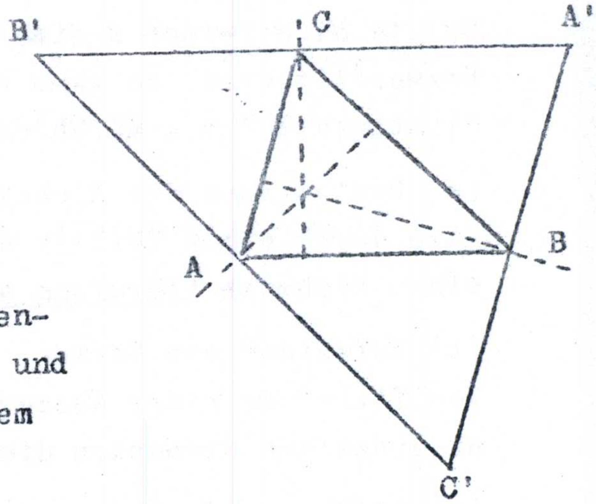
Beispiel 1: Es soll der Satz begründet werden, daß in jedem Dreieck die Höhen einander in einem Punkt schneiden. Den angeführten Möglichkeiten von Begründungen entsprechen dann die folgenden Argumentationen:

(a) Dieser Satz steht im Lehrbuch!

(b) Der Satz ist richtig, weil er in mehreren Zeichnungen bestätigt wurde. (Abgesehen davon, daß ein Punkt und eine Gerade nie genau gezeichnet werden können, bleibt hier die Frage offen: Gilt dieser Satz für jedes denkbare Dreieck, kann er auch für ein Dreieck mit den Maßen $c = 10\,000$ km, $\alpha = 0{,}01°$ und $\beta = 0{,}01°$ auf diese Weise überprüft werden?)

(c) Wir wissen: Die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Ferner wissen wir: In einem gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen und die Seitensymmetralen zusammen. Wenn nun die Höhen einander nicht in einem Punkt schneiden würden, dann könnten auch die Seitensymmetralen nicht in jedem Dreieck einander in einem Punkt schneiden.

(d) Wir wissen: Die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt. Ferner gilt für jedes Dreieck ABC: Legt man durch die Punkte A,B,C Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten, so erhält man ein Dreieck A'B'C', in dem A,B,C die Mittelpunkte der Seiten sind. Damit sind die Höhen des Dreiecks ABC die Seitensymmetralen des Dreiecks A'B'C' und schneiden einander daher in einem Punkt.



Wie bereits ausgeführt, geht man beim deduktiven Begründen einer Aussage α von Aussagen $\beta, \gamma, \ldots$ aus, die als richtig angesehen werden

Beim Beispiel 2(d) sind dies:

β: Die Seitensymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

γ: A,B,C sind die Mittelpunkteder Seiten des Dreiecks A'B'C'.

Man kann natürlich auch diese Aussagen anzweifeln und deren Begründung verlangen. So kann man etwa γ dadurch deduktiv begründen, daß man überlegt, daß die vier Dreiecke, aus denen A'B'C' zusammengesetzt ist, kongruent sind. Dazu müssen weitere Aussagen herangezogen werden, die als richtig angesehen werden, etwa Kongruenzsätze.

So wie die Beurteilung der Richtigkeit einer Aussage, ist auch die Anerkennung der angeführten Arten von Begründungen subjektiv und hängt u.a. von der kognitiven Entwicklung der Einzelperson ab. Sicherlich spielen auch affektive Komponenten dabei eine Rolle; so wird oft aus Bequemlichkeit eine Begründung durch Berufung auf eine Autorität einer langwierigen deduktiven Begründung vorgezogen.

In verschiedenen Wissenschaften sind durchaus auch unterschiedliche Begründungsarten üblich: Werden in der Mathematik nur deduktive Begründungen anerkannt, so werden in den Naturwissenschaften Gesetze häufig durch Experimente "bewiesen", die diese Gesetze in Einzelfällen bestätigen. Auch das reduktive Schließen ist üblich: Aus einer Theorie werden experimentell überprüfbare Folgerungen gezogen und durch Verifizierung dieser Folgerungen wird auf die Richtigkeit der Theorie geschlossen.

Falls man allgemeine Lernziele der Schule und insbesondere des Mathematikunterrichts wie "Ausbildung des exakten und kritischen Denkens - Förderung der Fähigkeit zum logischen Schließen" (Lehrplan für Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen in Österreich) oder "Dialogwilligkeit und Argumentationsfähigkeit", "Urteilsvermögen und Kritikfähigkeit" (A. Kirsch) akzeptiert, so wird man auch der Forderung "Der Unterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, rationale Argumentation zu üben" (H. Winter) zustimmen und entsprechende Möglichkeiten in den Unterricht einplanen müssen. Darüber hinaus erscheint es auch notwendig, den Schülern die Verschiedenartigkeit von Begründungen bewußt zu machen und auf Unzulänglichkeiten der einzelnen Arten von Begründungen einzugehen, so daß die Schüler dazu geführt werden, selbständig Mängel von einzelnen Begründungen zu erkennen.

Für die Mathematik ist das deduktive Begründen charakteristisch. Das Wesen des deduktiven Begründens scheint in der in der Mathematik üblichen Form besonders gut erkennbar zu sein. In kaum einer anderen Wissenschaft bieten sich so reichliche Möglichkeiten zum deduktiven Begründen wie in der Mathematik. Diese Argumente sprechen einerseits dafür, daß dem deduktiven Begründen ein angemessener Raum im Mathematikunterricht zur Verfügung gestellt wird; andererseits können diese Argumente auch als Gründe für eine Rechtfertigung des Mathematikunterrichtes angesehen werden.

2. Argumentationsbasis von Beweisen

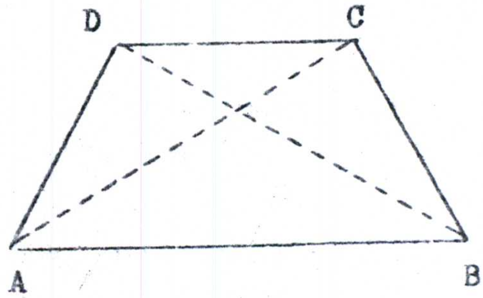
Mathematische Sätze sind im allgemeinen von der Form "Wenn $\beta, \gamma, \ldots$ richtig sind, dann ist α richtig" (wenn sie auch nicht immer in dieser Form formuliert sind). Dabei wird angenommen, daß $\beta, \gamma, \ldots$ richtig sind. Falls jedoch $\beta, \gamma, \ldots$ nicht richtig sein sollten, muß α auch nicht richtig sein.

Um eine Aussage α durch Schließen begründen zu können, ist also notwendig, daß Aussagen $\beta, \gamma, \ldots$ vorliegen, die als richtig angesehen werden und aus denen auf die Richtigkeit von α geschlossen werden kann. Eine Menge von Aussagen, die als richtig angesehen werden, soll zusammen mit den Schlußweisen, die als zulässig anerkannt werden, als <u>Argumentationsbasis</u> bezeichnet werden.

Eine Begründung aufgrund einer vorgegebenen Argumentationsbasis soll als ein <u>Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis</u> bezeichnet werden. Von einem <u>mathematischen Beweis</u> wird man voraussetzen, daß <u>deduktiv</u> geschlossen wird.

Verschiedene Personen können zur Begründung derselben Aussage durchaus verschiedene Argumentationsbasen verwenden, die sich auch in der Art des Schließens unterscheiden.

<u>Beispiel 2</u>: Es ist zu begründen, daß in jedem gleichschenkeligen Trapez die Diagonalen gleich lang sind. Folgende Antworten sind denkbar:



(1) Daß die Diagonalen gleich lang sind, ist klar; das braucht man nicht zu begründen. (Der Satz, daß die Diagonalen in einem gleichschenkeligen Trapez gleich lang sind, ist hier Teil der Argumentationsbasis.)

(2) Nachdem ein Trapez gezeichnet wurde und die Länge der Diagonalen gemessen wurde, wird festgestellt: Die Diagonalen sind gleich lang. (Hier gehört das Ergebnis der Messung zur Argumentationsbais; geschlossen wird induktiv.)

(3) Denkt man sich das Trapez ausgeschnitten, umgedreht und wieder an die alte Stelle gelegt, dann erkennt man, daß die Diagonalen gleich lang sind.
(Zur Argumentationsbasisgehört hier die folgende Annahme : kann man eine Strecke durch eine "Bewegung" in eine andere überführen, dann sind die Strecken gleich lang. Die Schlußweise ist zwar etwas verschwommen, kann aber doch als deduktiv bezeichnet werden.)

(4) In einem gleichschenkeligen Trapez ABCD ist die Symmetrale der Seite AB auch eine Symmetrale des Trapezes.
Durch eine Spiegelung an dieser Symmetrale geht die Diagonale AC in die Diagonale BD über, daher sind diese Diagonalen gleich lang. (Hier wird deduktiv geschlossen; es liegt eine Präzisierung der Argumentation von (3) vor. Zur Argumentationsbasis gehören u.a.: Die Symmetrale von AB ist eine Symmetrale des Trapezes. Bei einer Spiegelung gehen Strecken in Strecken gleicher Länge über.)

Dieses Beispiel soll auch zeigen, daß eine Argumentationsbasis wesentlich von der kognitiven Struktur einer Person abhängt. Schüler werden zunächst wie bei (1), (2) oder vielleicht auch wie bei (3) argumentieren, zu einer Argumentation wie bei (4) müssen sie erst eine entsprechende geistige Entwicklung durchgemacht haben.

Da nun eine Argumentationsbasis einer Person wesentlich von der kognitiven Struktur dieser Person abhängt und diese Strukturen bei einem Lehrer und bei einem Schüler meist stark differieren, kann nicht erwartet werden, daß einer der beiden einen Beweis führt, der auch für den anderen zufriedenstellend ist. (Typisch für diese Situation sind Äußerungen von Schülern folgender Art: "Muß das auch bewiesen werden? Das ist doch klar!") Für die Behandlung von Beweisen im Unterricht ist daher eine gemeinsame Argumentationsbasis der Schüler und des Lehrers anzustreben. Dazu bietet sich eine Argumentationsbasis an, die der kognitiven Struktur der Schüler angepaßt ist und die vom Lehrer zunächst zu übernehmen ist.

Um diese Argumentationsbasis feststellen zu können, ist es zweckmäßig, Schüler zunächst selbständig einfache Sachverhalte begründen zu lassen, diesbezügliche Gespräche zwischen Schülern führen zu lassen oder allenfalls Schülern in Gruppenarbeit Gelegenheit für Begründungen zu geben.

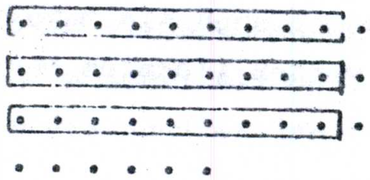
Ein langfristiges Ziel des Mathematikunterrichtes sollte nun <u>ein Ausbau</u> <u>und</u> <u>eine</u> <u>Veränderung</u> <u>der</u> <u>Argumentationsbasis</u> der Schüler sein. Dieser Ausbau sollte auch bei den 10- bis 14-jährigen Schülern erfolgen und nicht nur späteren Lebensjahren vorbehalten bleiben. Entsprechend der geistigen Entwicklung in diesem Alter, die vom logisch-konkreten Denken verbunden mit Handlungen (entsprechend (2), (3) in Beispiel 2) zum logisch-formalen Denken (entsprechend (4) in Beispiel 2) führt, ist eine analoge Entwicklung des Begründens in der Mathematik, die zum deduktiven Begründen führt, anzustreben.

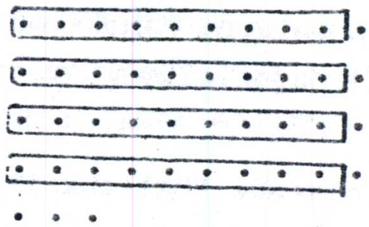
In folgenden Beispiel wird ein Vorschlag für eine stufenweise Anhebung des Argumentationsniveaus gemacht, die sich auf einen längeren Zeitraum erstrecken kann, also nicht auf ein Schuljahr beschränkt sein muß.

<u>Beispiel 3:</u> Der Satz, daß eine natürliche Zahl genau dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist, kann etwa auf folgenden Stufen behandelt werden:

(1) Eine Reihe von Beispielen (9 teilt 36, 9 teilt nicht 37, 9 teilt nicht 100, 9 teilt 108,...) kann zu der Vermutung führen: Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist; eine Zahl ist nicht durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme nicht durch 9 teilbar ist.
Es ergeben sich die Fragen: Gilt diese Vermutung für alle natürlichen Zahlen? Gilt sie für 978 326 910? Gilt sie für 190 467 222 894? Warum gilt diese Regel?

(2) Eine Erklärung für diese Regel kann (auf der Ebene des konkreten Handelns) für einzelne zweistellige Zahlen mit Spielmarken gegeben werden.
Man stellt die zu untersuchenden Zahlen zunächst mit diesen Marken dar:

36 

43 

Ob eine Zahl durch 9 teilbar ist, kann man am Rest erkennen, den man durch wiederholtes Abziehen der Zahl 9 erhält. Nimmt man in den obigen Anordnungen von Spielmarken je 9 Marken aus jeder Zeile weg, so erkennt man, daß die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 davon abhängt, ob der nach dem Abziehen verbleibende Rest (das ist die Ziffernsumme) durch 9 teilbar ist.

Diese Vorgangsweise ist bei jeder zweistelligen Zahl anwendbar; damit ist für diese Zahlen eine Begründung der Regel gegeben.

(3) Dieses Verfahren kann in der üblichen dekadischen Darstellung von Zahlen auch für mehrstellige Zahlen deutlich gemacht werden:

$$36 = 3 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot 9 + 3 + 6$$
$$43 = 4 \cdot 10 + 3 = 4 \cdot 9 + 4 + 3$$
$$273 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 = 2 \cdot 99 + 7 \cdot 9 + 2 + 7 + 3$$

Auch bei dieser Darstellung ist zu erkennen, daß die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 von der Teilbarkeit ihrer Ziffernsumme abhängt. Ebenso ist klar, daß dieses Verfahren bei allen Zahlen möglich ist.

(4) Eine allgemeine Beschreibung dieses Vorgehens mit Variablen zeigt, daß die obige Regel für alle zweistelligen, dreistelligen, ... Zahlen gelten muß:

$$a \cdot 10 + b = a \cdot 9 + a + b$$
$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = a \cdot 99 + b \cdot 9 + a + b + c$$

(5) Eine weitere Exaktifizierung erfolgt nun dadurch, daß man untersucht, durch welche Rechengesetze und welche Sätze über die Teilbarkeit die einzelnen Schritte begründet werden können.

3. Vorübungen zum Beweisen und lokales Beweisen

Beweisen ist im allgemeinen eine komplexe Tätigkeit. Übungen zu den dabei auftretenden Einzelaktivitäten sind in jeder Schulstufe zweckmäßig. Diese Übungen können vielfach in herkömmliche Aufgabenstellungen eingebaut, aber auch in eigens konstruierten Aufgaben vorgenommen werden. Manche dieser Übungen können auch als Beweise von relativ speziellen Aussagen angesehen werden (lokales Beweisen).

Auf folgende Möglichkeiten sei hingewiesen:

- Unterscheiden von Sätzen und Definitionen
- Begründen von Einzelschritten beim Lösen von Aufgaben
- Übungen in logischen Schlußweisen an mathematischen Inhalten
- Zusammenfassende Darstellung der Lösungen von Aufgaben
- Verwendung von Variablen zur Beschreibung und zur Verallgemeinerung von Sachverhalten

Eine Illustration dieser Möglichkeiten durch Beispiele kann dem Aufsatz "Beweisen im Mathematikunterricht - Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II", der in dem Buch "Beweisen im Mathematikunterricht" (Hrsg. W. Dörfler, R. Fischer; Verlag Hölder-Pichler-Tempsky) auf den Seiten 103 - 134 enthalten ist, entnommen werden.

4. Arbeiten mit vorliegenden Beweisen

Eine Schwierigkeit bei der Behandlung von Beweisen im Mathematikunterricht liegt darin, daß in vielen Fällen Schüler nicht in der Lage sind, einen Beweis selbständig zu finden. Doch ist selbst für Mathematiker nicht nur das Finden, sondern auch das Auseinandersetzen mit Beweisen, die bereits vorliegen, eine wesentliche Tätigkeit.

Im folgenden soll nun aufgezeigt werden, in welchen Formen solche Auseinandersetzungen mit vorliegenden Beweisen erfolgen können. Jede der vorgeschlagenen Aktivitäten kennzeichnet auch eine Form des Verständnisses eines Beweises und kann auch als eine Aufgabenstellung angesehen werden, die zu solch einer Form des Verständnisses führt oder sie überprüft.

Hervorgehoben werden soll noch, daß über die "Vorgeschichte" des zu behandelnden Beweises nichts ausgesagt wird: Der Beweis kann durch Schüler gefunden, vom Lehrer mit den Schülern im Unterricht erarbeitet, vom Lehrer vorgetragen oder von den Schülern in einem Buch gelesen worden sein. Die meisten der anschließend aufgezählten Aktivitäten können sowohl dann durchgeführt werden, wenn der Beweis in schriftlicher Form unmittelbar vorliegt, als auch dann, wenn die Schüler den Beweis im Gedächtnis haben sollten.

Im einzelnen bestehen folgende Möglichkeiten:

- Wiedergabe eines Beweises oder von Teilen eines Beweises
- Wiedergabe eines Beweises mit veränderter Bezeichnung oder anhand einer veränderten Zeichnung
- Durchführen eines Beweises für einen Sonderfall (Spezialisierung des vorliegenden Beweises)
- Richtige Sequenzierung der ungeordnet vorgelegten Teile eines Beweises
- Erkennen, daß bei mangelhafter Wiedergabe eines Beweises einzelne (bekannte) Beweisschritte fehlen und Wiedergabe dieser Schritte
- Begründen einzelner Beweisschritte durch mathematische Sätze oder Definitionen
- Feststellen der Beweisstellen, bei denen Voraussetzungen eingehen
- Erkennen von Beweislücken bzw. von Exaktifizierungsmöglichkeiten
- Ausfüllen von Beweislücken bzw. Durchführung der Exaktifizierung
- Präzisierungen in formaler Hinsicht
- Erkennen von Fehlern sachlicher oder logischer Art
- Erkennen logischer Schlußweisen
- Darlegung der Beweisstruktur (des Beweisgedankens) durch Wiedergabe der Voraussetzungen, Beschreibung der wichtigsten Beweisschritte in geordneter Folge und Angabe des Zieles

Eine ausführliche Beschreibung dieser Aktivitäten und Beispiele dazu sind in dem bereits zitierten Aufsatz enthalten. Ebenso werden dort noch das Finden und Erarbeiten von Beweisen sowie die Motivierung der Schüler zum Beweisen behandelt.